LEZIONE 38

mercoledì 21 dicembre 2022 09:08

Successioni e serie

Successioni:

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus A}$ o $\{a_n\}_{n\geq n_0}$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$

Abbiamo detto che si possono calcolare i limiti di successioni:

- $\lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right).$
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1.$
- $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \nexists$

$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ La successione oscilla tra due valori distinti

---

Vogliamo sommare infiniti termini di una successione.

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 0,333333\ldots\ldots$
$= 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003\ldots\ldots$

Def: Sia $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ con $n_0\in\mathbb{N}$ una successione. Allora $\forall M\in\mathbb{N}$ $M\geq n_0$, possiamo definire:

$$S_M := \sum_{n=n_0}^{M} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots\ldots + a_M.$$

S_M si dice SOMMA PARZIALE M-ESIMA DI $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ (CON INDICE INIZIALE n_0).

$\{S_M\}_{M\geq n_0}$ è una successione detta SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI di $\{a_n\}_{n\geq n_0}$.

Def: Sia $n_0 \in \mathbb{N}$, sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione. Si definisca **SERIE** di termini $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e indice iniziale n_0 la quantità $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{M\to+\infty} S_M$ dove $S_M = \sum_{n=n_0}^{M} a_n$

- Si dice che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è **CONVERGENTE** se $\lim_{M\to+\infty} S_M$ esiste finito
- Si dice che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è **DIVERGENTE A $+\infty$** se $\lim_{M\to+\infty} S_M = +\infty$
  $\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = +\infty\right)$
- Si dice che la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è **DIVERGENTE A $-\infty$** se $\lim_{M\to+\infty} S_M = -\infty$
  $\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = -\infty\right)$
- Si dice che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ è **INDETERMINATA / IRREGOLARE** se $\nexists \lim_{M\to+\infty} S_M$.

ESEMPI

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 \qquad (a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{M\to+\infty} \sum_{n=1}^{M} 1 = \lim_{M\to+\infty} M = +\infty$$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \textbf{(SERIE DI MENGOLI)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= S_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

In generale:

$$S_M = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{M+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{M \to +\infty} S_M = \lim_{M \to +\infty} 1 - \frac{1}{M+1} = 1$$

Serie Telescopiche:

Def: Si dice che una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è TELESCOPICA se si può trovare una successione $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ tale che $a_n = b_n - b_{n+1}$

Nell'esempio precedente: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ e $b_n = \frac{1}{n}$

Per le serie telescopiche:

$$S_{n_0} = a_{n_0} = b_{n_0} - b_{n_0+1}$$

$$S_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1} = b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+1}} + \cancel{b_{n_0+1}} - b_{n_0+2}$$
$$= b_{n_0} - b_{n_0+2}$$

$$S_{n_0+2} = S_{n_0+1} + a_{n_0+2} = b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+2}} + \cancel{b_{n_0+2}} - b_{n_0+3} = b_{n_0} - b_{n_0+3}$$

$\vdots$

In generale $S_M = b_{n_0} - b_{M+1}$

Il limite di S_M si dipende da b_{n_0} e da $\lim_{M \to +\infty} b_{M+1}$.

ESEMPIO

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \log n - \log(n+1) \qquad b_n = \log n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{M \to +\infty} \sum_{n=2}^{M} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{M \to +\infty} \sum_{n=2}^{M} \log n - \log n+1$$

$$= \lim_{M \to +\infty} b_2 - b_{M+1} = \lim_{M \to +\infty} \log 2 - \log(M+1) = -\infty$$

la serie diverge a $-\infty$.

Serie geometrica (di ragione x)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \qquad (\text{convenzione } 0^0 = 1)$$

- Se $x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$
- Se $x \neq 1$:

$$S_M = \sum_{n=0}^{M} x^n$$

$$(1-x) S_M = \sum_{n=0}^{M} (1-x)\, x^n = \sum_{n=0}^{M} x^n - x^{n+1}$$

$$= x^0 - x^{M+1} = 1 - x^{M+1}$$

Quindi $\displaystyle S_M = \frac{1-x^{M+1}}{1-x}$

$$\lim_{M\to+\infty} S_M = \lim_{M\to+\infty} \frac{1-x^{M+1}}{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

Quindi:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è: è divergente a $+\infty$ se $x \geq 1$
è convergente a $\frac{1}{1-x}$ se $x \in (-1, 1)$
è indeterminata se $x \leq -1$.

ESEMPI

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 = 2$

- $0{,}3333333\ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

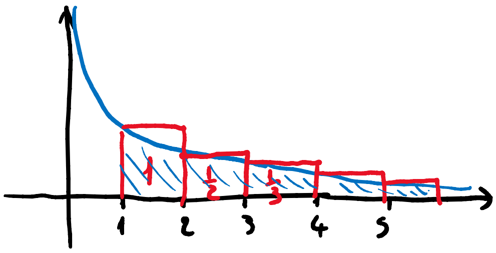
$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^0} \right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 3\left(\frac{10}{9} - 1 \right)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Serie armonica

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è la somma delle aree dei rettangoli ed è maggiore di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$.

Più precisamente:

$\forall\, M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$:

$$S_M = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n}$$

$$\int_1^{M+1} \frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{M} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \sum_{n=1}^{M} \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n}\left(\cancel{n}+1-\cancel{n}\right) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} = S_M$$

Quindi:

$$S_M \geq \int_1^{M+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(M+1) - \log 1 = \log(M+1) \xrightarrow{M \to +\infty} +\infty$$

Dunque: $\lim_{M \to +\infty} S_M = +\infty$

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si può far vedere che la serie è: divergente se $\alpha \leq 1$
convergente se $\alpha > 1$

TEOREMA Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ una successione.
Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

(CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONV. DI UNA SERIE).

Attenzione:

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

Ad esempio $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

La condizione necessaria può essere usata solo per dimostrare che una serie non è convergente:

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ $\quad\quad$ $\nexists \lim_{n \to +\infty} \sin n$

il limite non è 0

quindi la serie non è convergente.

Serie a termini non negativi / positivi

Def: Si dice che una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è a termini non negativi se $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Def Si dice che una serie è A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N},\ \bar{n} \geq n_0$ tale che $a_n \geq 0$ $\forall\, n \geq \bar{n}$.

Nota: In modo simile:

Def: Si dice che una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è a termini positivi se $a_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$.

Def Si dice che una serie è A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N},\ \bar{n} \geq n_0$ tale che $a_n \geq 0$ $\forall\, n \geq \bar{n}$.

TEOREMA Una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ a termini (definitivamente) non negativi può essere soltanto convergente o divergente a $+\infty$.

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ è una serie a termini non negativi

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ non è soddisfatta la cond. necessaria per la convergenza.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ non è convergente

Siccome può essere solo convergente o divergente a $+\infty$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = +\infty$.

IDEA DELLA DIM. DEL TEOREMA.

Se $a_n \geq 0\ \forall n$: $\quad S_{M+1} = \sum_{n=n_0}^{M+1} a_n = \sum_{n=n_0}^{M} a_n + a_{M+1}$

$$= S_M + a_{M+1} \geq S_M.$$

S_M è una successione monotona crescente
Dal teorema sull'esistenza del limite per funzioni monotone si ricava che $\exists \lim_{M \to +\infty} S_M$.
Inoltre $S_M \geq S_{n_0}$ $\forall M \geq n_0$ quindi il limite non è $-\infty$
Può essere solo $+\infty$ (divergente a $+\infty$) o un numero reale (la serie è convergente).

Criteri di convergenza (per serie a termini non negativi / positivi)

1) Criterio della radice n-esima:
Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi.
Supponiamo che $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ $\quad (l \in [0, +\infty))$
Allora:
1) se $l < 1$ la serie è convergente
2) se $l > 1$ la serie è divergente
($l = 1$? BOH)

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

È una serie a termini non negativi:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{2} < 1$$

Per il criterio della radice n-esima la serie è convergente.

2) Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini (definitivamente) positivi. Assumiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

Allora:

1) Se $\ell < 1$ la serie è convergente.
2) Se $\ell > 1$ la serie è divergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$a_n = \frac{n}{3^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{3} < 1.$$

La serie è convergente.

3) Criterio del confronto:

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie. Assumiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora:

1) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è convergente, anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.
2) Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = +\infty$, allora anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = +\infty$.

4) Criterio del confronto asintotico:

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie a termini (definitivamente) positivi. Assumiamo che $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$

e $l \in (0, +\infty)$. Allora le serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n \to +\infty} 1.$$

Quindi la serie si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che è una serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$ e quindi è convergente.

Serie di segno variabile

Def: Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie. Si dice che la serie è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

TEOREMA

Ogni serie assolutamente convergente è convergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ è a termini non negativi e $\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente.

Per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ è convergente.

Quindi anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è convergente.

Criterio di Leibniz (per serie del tipo $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$)
SERIE A SEGNI ALTERNI

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che:

1) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (o $a_n \geq 0$ definitivamente)

2) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

3) a_n è monotona decrescente (o def. decrescente).

Allora: $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente.

Serie di Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$